KAKO RIJEŠITI BILO KOJU JEDNADŽBU

(s jednom nepoznanicom nad skupom realnih brojeva)

Boris Čulina

Veleučilište Velika Gorica

Problem

Jednadžba s jednom nepoznanicom na skupu realnih brojeva je uvjet u obliku jednakosti na jedan realan broj. Primjer:

$$x^2 = 2x$$

Rješenje jednadžbe je realan broj koji ispunjava taj uvjet. Uvijek možemo uvrštavanjem ispitati je li neki broj rješenje jednadžbe. Tako 1 jeste a 2 nije rješenje gornje jednadžbe.

$$1^2 = 2 \cdot 1 \quad \text{NE}$$

$$2^2 = 2 \cdot 2 \quad \text{DA}$$

Problem: Naći sva rješenja jednadžbe. Ima li gornja jednadžba još rješenja? Lako je vidjeti da je i nula rješenje. Teorija kvadratnih jednadžbi kaže da ova jednadžba ima najviše dva realna rješenja. Tako znamo da smo pronašli sva rješenja.

Važnost: Mjerenjem, realnost možemo preciznije opisati pomoću brojeva, a pravilnosti u realnosti odnosima među pridruženim brojevima. Ti odnosi su često jednakosti. Na primjer, u odgovarajućoj aproksimaciji, za tanku leću žarišne duljine *f*, udaljenost predmeta *s* i udaljenost slike predmeta *s*' od leće su povezani sljedećom jednakošću (jednadžba leće)

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

Na primjer, znajući da je žarišna duljina leće 10cm, a predmet udaljen 50cm, pomoću ovog zakona možemo postaviti jednadžbu za nepoznat položaj slike predmeta (sve je izraženo u centimetrima):

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10}$$

i njenim rješavanjem dobiti položaj slike predmeta. Još bolje, koristeći opće oznake možemo, rješavajući jednadžbu po *s*', dobiti novu formulu koja nam daje položaj slike za bilo koju leću i bilo koji položaj predmeta:

$$s' = \frac{sf}{s - f}$$

Mnogi praktični problemi se svode na rješavanje odgovarajućih jednadžbi. Znajući zakone dane situacije koji su u obliku jednakosti i znajući rješavati jednadžbe, možemo izvoditi nove opće zakone kao i rješavati konkretne probleme. Jednadžbe i postupci rješavanja jednadžbi daju osnovni matematički aparat za gotovo cjelokupno srednjoškolsko gradivo, pogotovo iz fizike.

Više o jednadžbama i njihovoj upotrebi možete pročitati, a možda i nasmijati se, na sljedećem linku:

https://understandingmath.academy/wp-content/uploads/2020/10/Equations_compressed.pdf

Povijest rješavanja

Kako riješiti linearnu i kvadratnu jednadžbu zna se od davnina.

Linearna jednadžba: $ax + b = 0, a \neq 0 \longrightarrow x = \frac{-b}{a}$

Kvadratna jednadžba: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \longrightarrow x \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Formule po kojima se rješavaju te jednadžbe uveo je u drugoj polovici 16. stoljeća François Viète. Uvevši opće oznake (varijable) za koeficijente jednadžbi, Viète je napravio revolucionaran skok koji je omogućio da se formulama rješenja izraze pomoću koeficijenata. Danas, naviknuti na varijable, možda i nismo dovoljno svjesni koliko je velik skok napravljen u matematici i znanosti njihovim uvođenjem. Vièteu je u tome pomagao i Marin Getaldić, čiju nadarenost je Viète jako cijenio.[1] Današnje oznake uglavnom potječu od René Descartesa s početkom 17. stoljeća. Prije, rješavanje se sastojalo od uputa kojima se dolazilo do rješenja.

Postupci rješavanja **kubnih jednadžbi** ($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$) i **jednadžbi četvrtog stupnja** ($ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$) otkriveni su u renesansnoj Italiji u prvoj polovici 16. stoljeća. Bilo je to doba u kojem su matematičari izazivali jedni druge na intelektualne dvoboje, a ponekad su organizirana i klađenja, u kojima su oni dobivali i gubili slavu i novac. Ako je netko znao postupak rješavanja jednadžbi, držao bi ga u tajnosti jer mu je to donosilo prestiž i novac. Niccolò Fontana, poznatiji kao Tartaglia[2], sudjelujući u tim dvobojima otkrio je postupak rješavanja kubne jednadžbe. Naravno, držao ga je u tajnosti. Međutim, Girolamo Cardano je na prevaru, obećavši mu unosan posao, nagovorio Tartaglia-u da mu oda postupak uz obećanje da ga neće nikome reći. Nakon par godina Cardano je objavio postupak rješavanja u svojoj knjizi *Ars Magna* (1545. godine) i tako prekršio obećanje, a što je rezultiralo i grdnom svađom.

[1] O Marinu Getaldiću je ostalo zapisano da je bio „anđeo po naravi, a demon u matematici".

[2] „Tartaglia" na talijanskom znači „mucavac". Kao dijete je teško ozlijeđen po licu kad su francuski vojnici napravili masakr u mjestu u kojem je živio, i od tih ozljeda nije mogao ispravno govoriti.

Zašto ne koristimo formulu za rješavanje kubne jednadžbe $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$? Evo odgovora:

$$x = -\frac{\left(-i\sqrt{3}+1\right)\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{3\,c}{a}\right)}{18\left(-\frac{b^3}{27\,a^3} + \frac{bc}{6\,a^2} - \frac{d}{2\,a} + \frac{\sqrt{-\frac{1}{3}\,b^2c^2 + \frac{4}{3}\,ac^3 + 9\,a^2d^2 + \frac{2}{3}\,(2\,b^3 - 9\,abc)d}}{6\,a^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\left(i\sqrt{3}+1\right)\left(-\frac{b^3}{27\,a^3} + \frac{bc}{6\,a^2} - \frac{d}{2\,a} + \frac{\sqrt{-\frac{1}{3}\,b^2c^2 + \frac{4}{3}\,ac^3 + 9\,a^2d^2 + \frac{2}{3}\,(2\,b^3 - 9\,abc)d}}{6\,a^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{b}{3\,a}$$

Slične su formule i za preostala dva rješenja. Kubna jednadžba može imati maksimalno tri realna rješenja – formule ponekad daju isto realno rješenje ili kompleksan broj za rješenje.

U izrazu se javlja kompleksni broj *i*. Originalno su matematičari računali s $\sqrt{-1}$. Iako nisu znali šta je to, „zažmirili“ bi i računali, jer bi se nekad taj izraz u računanju nestao, i dobili bi rješenje, a nekad bi ostao i ne bi dobili (realno) rješenje. Davanje smisla takvim izrazimo dovelo je do zamisli o kompleksnim brojevima.

Formula za jednadžbu četvrtog stupnja je, naravno, još veća. Nju je otkrio Cardanov učenik Lodovico Ferrari.

Nakon toga su matematičari stoljećima bezuspješno tražili formule za rješavanje **polinomnih jednadžbi stupnja većeg od 4**. Tek početkom devetnaestog stoljeća (1824. godine) je mladi norveški matematičar Niels Abel pokazao da ne postoje opće aritmetičke formule za rješavanje jednadžbi stupnja većeg od 4, (tzv. Abelov teorem nemogućnosti).[3] Nešto poslije, mladi francuski matematičar Evarist Galoisa je dao kriterije kod kojih se jednadžbi rješenja daju izraziti aritmetičkim formulama pomoću koeficijenata jednadžbe. Pri tome je razvio teoriju grupa, jednu od osnova moderne matematike.[4]

Kvalitativni, analitički i numerički pristup

Već iz ove povijesti rješavanja jednadžbi vidimo koliko je teško, pa čak i nemoguće, nalaziti rješenja jednadžbi analitičkim putem: krenemo od jednadžbe i u jednom nizu transformacija jednadžbi dođemo do rješenja. Takav pristup dominira u srednjoj školi, i to nije dobro. Štoviše, većina jednadžbi u srednjoj školi je naštimana da se može tako riješiti. Vrlo malu promjenu treba napraviti da bismo od jednadžbe koju je lako riješiti dobili jednadžbu koju je nemoguće analitički riješiti. Takav je npr. prijelaz s najjednostavnije trigonometrijske jednadžbe $\cos x = \frac{1}{2}$ na jednadžbu $\cos x = \frac{1}{2}x$ koju je nemoguće analitički riješiti. Takav pristup rješavanju nas ograničava, ne toliko zbog izbora jednadžbi koje se mogu tako riješiti, nego više zbog toga da ne razvijamo veoma značajne načine razmišljanja, a to su kvalitativni i numerički pristup rješavanju problema.

[3] U Abelovom matematičkom razvoju veoma važan događaj je bio kad se promijenio učitelj iz matematike. Prethodni učitelj je otpušten jer je kažnjavajući jednog đaka usmrtio ga. Novi učitelj je odmah primijetio Abelovu sklonost matematici i svesrdno mu pomagao.

[4] Galois je poginuo u duelu kad je imao samo 20 godina. Noć prije dvoboja, sluteći smrt, zapisao je sve svoje matematičke rezultate (tzv. Galoisov testament) i zamolio prijatelja da ih pokaže poznatim francuskim matematičarima. Kad je brat Alfred zaplakao gledajući ga kako umire, Evarist mu je rekao: „Ne plači brate. Trebam svu hrabrost da umrem sa dvadeset.“.

Analitički pristup rješavanju problema: logičkim razmišljanjem i simboličkim računanjem doći do egzaktnog rješenja problema.

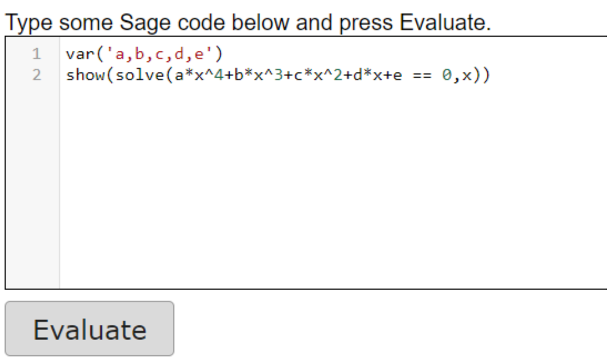
Kvalitativni pristup rješavanju problema: zaključiti nešto o rješenju a da se ono stvarno ne nađe.

Numerički pristup rješavanju problema: naći numeričko rješenje problema do na traženu točnost. Traženu točnost određuje problem koji želimo riješiti - koliku on dozvoljava grešku u rješavanju.

Pokazat ćemo na primjeru rješavanja jednadžbi kako kombinacijom kvalitativnog, analitičkog i numeričkog pristupa možemo riješiti svaku jednadžbu s jednom nepoznanicom na skupu realnih brojeva. Kvalitativni pristup će nam pomoći da vidimo koliko ima rješenja i gdje se otprilike nalaze. Ako ih ne možemo analitički odrediti, imamo numeričke postupke koji će ih odrediti na koju god želimo točnost. Pri tome ćemo se pomoći softwareom koji će nam sve ovo učiniti veoma laganim. Koristit ćemo *SageMath*, slobodan open-source (dakle, ne samo da je besplatan već mu se i u kôd može zaviriti) software koji je jednako moćan poput komercijalnih matematičkih softwarea, i kojeg održava i naveliko koristi matematička zajednica već gotovo dvadeset godina.

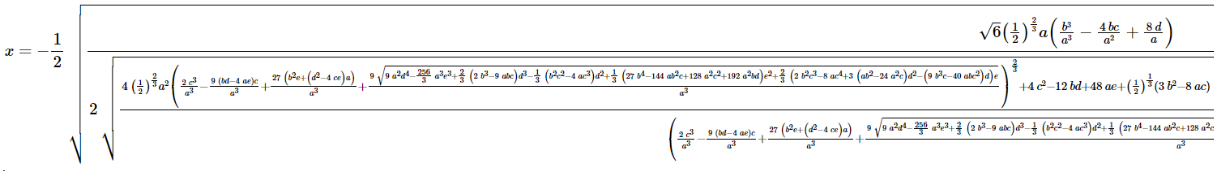
Položaj *SageMath* unutar matematičkih softwarea je gotovo identičan položaju programskog jezika Python unutar programskih jezika. Kao što je *Python* besplatan univerzalan programski jezik s velikom zajednicom koja ga podržava, jednako pogodan za programiranje u školi i programiranje u bilo kojoj profesiji, takav je i *SageMath* unutar matematičkih softwarea. Štoviše, *SageMath* je dodatak na *Python*, prilagođen za matematičke probleme, tako da u *SageMath* imamo, pored njegovih specifičnosti, na raspolaganju i kompletan Python.[5]

SageMath ćemo koristiti na za ovu svrhu najjednostavniji način: otići ćemo na stranicu https://sagecell.sagemath.org/ i u za to predviđeni okvir izdati mu naredbe. Tako sam, na primjer, dobio i gore prikazanu formulu za rješavanje kubne jednadžbe. A evo i naredbe za rješenje jednadžbe četvrtog stupnja:



[5] Kratki uvodni tutorial o SageMath se može naći na linku https://understandingmath.academy/wp-content/uploads/2020/10/SageMathTutorial-1.pdf, a „sve“ o SageMath možete naći na njegovoj stranici https://www.sagemath.org/ .

Pritiskom na tipku *Evaluate* dobit ćemo formule za sva četiri rješenja. Ovdje je, zbog veličine formula, prikazan samo početni dio formule za prvo rješenje:



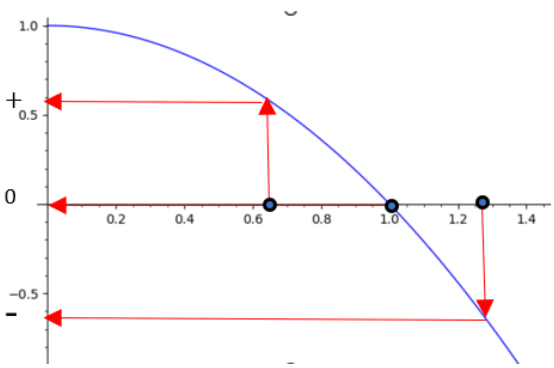
Na primjeru jednadžbe $x^3 = 2x - 1$ pokazat ću kako se kombiniranim pristupom može riješiti svaka jednadžba.

Kvalitativan pristup u rješavanju jednadžbi

Svaku jednadžbu možemo prebacivanjem svih članova na lijevu stranu svesti na oblik $f(x) = 0$.

To znači da su rješenja jednadžbe isto što i nul-točke funkcije $f(x)$: brojevi koje kad stavimo na ulaz u funkciju, na izlaz dobijemo nulu.

A njih je iz grafa funkcije (upotrebom softwarea) lako kvalitativno odrediti – to su zajedničke točke grafa funkcije i x – osi.



Na taj način imamo jednostavan postupak kojim možemo kvalitativno riješiti sve jednadžbe! A to nije mala stvar.

Pokažimo to na primjeru jednadžbe $x^3 = 2x - 1$. Prebacimo li sve članove na lijevu stranu dobit ćemo jednadžbu

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

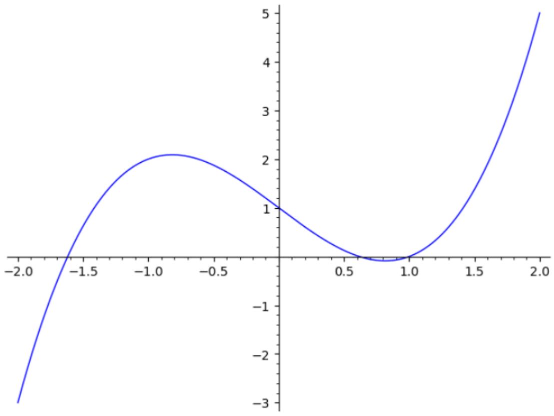
Tako rješavanje jednadžbe svodimo na traženje nul-točaka funkcije

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

Naredimo *SageMath*u da nam nacrta ovu funkciju:

```
plot(x^3-2*x+1, (x,-2,2))
```

SageMath će nam dati sljedeći graf:



Vidimo da graf ima tri zajedničke točke s *x*-osi. To su nultočke ove funkcije, odnosno rješenja naše jednadžbe. Možemo ih i približno odrediti: -1.6, 0.6 i 1. [6]

Ako i možemo analitički riješiti jednadžbu, dobro je prvo kvalitativno naći rješenja: tako znamo kakva rješenja možemo očekivati u analitičkom rješavanju, a što nam može pomoći i u rješavanju i u provjeri dobivenih rješenja.

Analitički pristup u rješavanju jednadžbi:

Analitički bismo mogli riješiti jednadžbu $x^3 - 2x + 1 = 0$ tako da s nešto upornosti i sreće faktoriziramo izraz na lijevoj strani:

$x^3 - 2x + 1 = x^3 + x^2 - x - x^2 - x + 1 = x(x^2 + x - 1) - (x^2 + x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 + x - 1\,)$

Tako dobijemo jednadžbu $(x - 1)(x^2 + x - 1\,) = 0$ koja se svede na dvije jednadžbe,

$x - 1 = 0$ i $x^2 + x - 1 = 0$, s rješenjima $x = 1$ i $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ova rješenja bismo mogli dobiti i na sljedeći više sistematski način, ali koji traži i više znanja. Graf nam sugerira da je 1 rješenje jednadžbe, što lako provjerimo uvrštavanjem $x = 1$ u jednadžbu. To znači da je polinom $x^3 - 2x + 1$ djeljiv polinomom $x - 1$. Algoritam dijeljenja polinoma nam daje za rezultat polinom $x^2 + x - 1$. Tako smo dobili traženu faktorizaciju $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1\,)$.

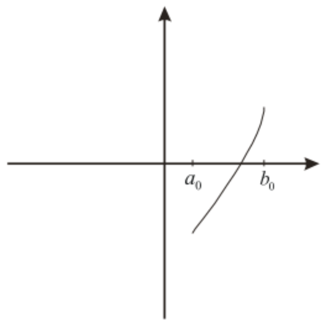
---

[6] Znamo da su to sva rješenja jer polinom trećeg stupnja ima najviše tri realne nultočke. Općenito, treba ispitati ima li funkcija nultočke van područja na kojem smo je nacrtali, bila da je crtamo na dovoljno velikom području bilo da koristimo neka svojstva funkcija. Na primjer, za polinome najveća potencija određuje njihovo ponašanje za jako pozitivne i jako negativne ulaze, pa su tako njihove vrijednost za takve ulaze jako velike po apsolutnoj vrijednosti. Obično, iz problemske situacije koja nas je dovela do jednadžbe znamo gdje bi se trebala nalaziti rješenja ili rješenje koje nas zanima. Npr. ako je rješenje jednadžbe težina automobila izražena u kilogramima, zanimat će nas samo rješenja u intervalu od recimo 500 do 3000 kg.

Numerički pristup u rješavanju jednadžbi:

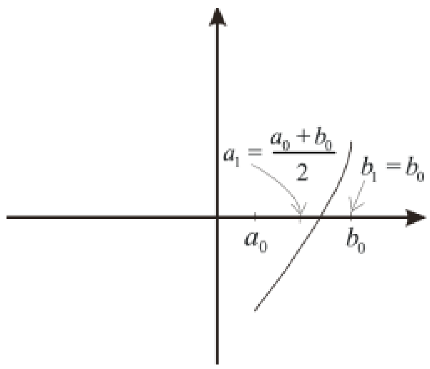
Prikazat ćemo jednu od metoda numeričkog rješavanja jednadžbi – metodu polovljenja. Metodom polovljenja utočnit ćemo do na milijutninku srednje rješenje gornje jednadžbe za koje otprilike znamo da je 0.6.

Metodom polovljenja možemo do na traženu točnost naći svaku nultočku koja siječe x-os na sljedeći način. Izaberemo jedan interval $[a_0, b_0]$ na čijim rubovima funkcija poprima suprotan predznak. Tada smo sigurni da se u tom intervalu nalazi nultočka funkcije.



Za približno rješenje možemo uzeti aritmetičku sredinu intervala: $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Greška je tad po apsolutnoj vrijednosti manja od polovice intervala: $\varepsilon_0 = \frac{b_0-a_0}{2}$.

Aproksimaciju možemo popraviti tako da odredimo u kojoj je polovici intervala rješenje. To možemo uraditi na sljedeći način. Izračunamo $f(x_0)$. Ako je $f(x_0) = 0$, imali smo sreću i pronašli rješenje (to se veoma rijetko desi). U protivnom, izabrat ćemo onu polovicu intervala na čijim krajevima funkcija ima različite predznake. Drugim riječima, x_0 nam postaje novi kraj intervala – njime zamijenimo onaj kraj starog intervala u kojem funkcija ima isti predznak kao i u x_0. Npr. prema gornjoj slici vidimo da treba zamijeniti lijevi kraj:



S novim intervalom $[a_1, b_1]$ (desnom polovicom starog intervala) postupak ponavljamo. Što više ciklusa uradimo to je aproksimacija rješenja aritmetičkom sredinom sve bolja, jer je svaki sljedeći interval upola manji od prethodnog.[7]

[7] Englezi, po svom imperijalističkom naslijeđu, ovu metodu zovu „lion hunting“.

Metoda polovljenja

Tražimo rješenje jednadžbe $f(x) = 0$ s greškom po apsolutnoj vrijednosti manjom od ε.

Ulaz: $a_0 < b_0$ takvi da $f(a_0)$ i $f(b_0)$ imaju suprotne predznake

Korak postupka: Neka smo dobili $a_i < b_i$ takve da $f(a_i)$ i $f(b_i)$ imaju suprotne predznake. Računamo

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2},\ \varepsilon_i = \frac{b_i - a_i}{2}$$

Kriterij zaustavljanja: Ako je $\varepsilon_i \leq \varepsilon$ ili $f(x_i) = 0$ (dobijena je željenja točnost ili je do na točnost računala dobijena nultočka) tada postupak prekidamo. Ako se to nije desilo tad izračunamo $f(x_i)$ i nove rubove $a_{i+1} < b_{i+1}$ dobijemo tako da zamijenimo sa x_i stari rub u kojem je predznak funkcije isti predznaku $f(x_i)$, dok drugi rub ostane isti.

Napišimo *Python* program (*Python* funkciju) koji će to uraditi umjesto nas: naredba Mp(*f*,*a*,*b*,*e*) će metodom polovljenja naći nultočku funkcije *f* na intervalu [*a*,*b*] tako da će greška po apsolutnoj vrijednosti biti manja od *e*. Naredba pretpostavlja da funkcija *f* ima na rubovima intervala različite predznake.

```
# Metoda polovljenja

def Mp(f,a,b,e):
    while (b-a)/2 > e:
        x = (a+b)/2
        if f(x) == 0:
            return x
        elif f(a)*f(x) > 0:
            a = x
        else:
            b = x
        print(f"a = {a:<12}b = {b}")
    return(a+b)/2
```

Da bismo bolje razumjeli šta se dešava pri izvršenju, naredba *print* će nam u svakom izvršenju *while* petlje ispisati sljedeći upola manji interval u kojem se nalazi rješenje.

Da bismo utočnili približno rješenje 0.6 jednadžbe $x^3 - 2x + 1 = 0$ do na jednu milijuntninku, primijenit ćemo ovaj Python program na funkciju $f(x) = x^3 - 2x + 1$ i interval [0.2, 0.8]:

```
Mp(lambda x : x^3-2*x+1,0.2,0.8,0.000001)
```

Evo ispisa:

```
a = 0.500000000000000b = 0.800000000000000
a = 0.500000000000000b = 0.650000000000000
a = 0.575000000000000b = 0.650000000000000
a = 0.612500000000000b = 0.650000000000000
a = 0.612500000000000b = 0.631250000000000
a = 0.612500000000000b = 0.621875000000000
a = 0.617187500000000b = 0.621875000000000
a = 0.617187500000000b = 0.619531250000000
a = 0.617187500000000b = 0.618359375000000
a = 0.617773437500000b = 0.618359375000000
a = 0.617773437500000b = 0.618066406250000
a = 0.617919921875000b = 0.618066406250000
a = 0.617993164062500b = 0.618066406250000
a = 0.618029785156250b = 0.618066406250000
a = 0.618029785156250b = 0.618048095703125
a = 0.618029785156250b = 0.618038940429688
a = 0.618029785156250b = 0.618034362792969
a = 0.618032073974609b = 0.618034362792969
a = 0.618033218383789b = 0.618034362792969
0.618033790588379
```

Tako nam je program utočnio rješenje jednadžbe do na traženi broj decimala. No on nam je dao i previše decimala. S obzirom da se greška javlja na poziciji milijuntinke, znamenke u rješenjima koje se nalaze iza milijuntinke nemaju nikakvog smisla. Zato ćemo rješenje zaokružiti, kao što se obično i radi, na mjestu milijuntinke (prikazat ćemo samo tzv. pouzdane znamenke):

$$x = 0.618034$$

Zaokruživanje rezultata na mjestu gdje se javlja greška mogli smo ugraditi i u Python kôd, ali nisam htio kvariti jednostavnost metode polovljenja.

Kad jednom razumijemo numeričke metode, da nije dovoljno da nam daju približno rješenje, već i ocjenu greške, jer važno je znati „koliko" je rješenje približno da bismo ga mogli ispravno upotrijebiti, tad možemo koristiti i gotove *SageMath* naredbe za numeričko računanje. Za numeričko rješavanje jednadžbi možemo koristiti naredbu *find_root* koja nam daje rješenje točno do na 17 znamenki (ne računajući početne nule). Ako nas zanima točnost do na neku decimalu, tad to možemo postići tako da na dobiveno rješenje primijenimo naredbu *round* kojom možemo zadati na koju decimalu želimo da se zaokruži rješenje.

Tako smo mogli dobiti i rješenje naše jednadžbe do na traženu točnost (šesto mjesto iza decimalne točke):

```
round(find_root(x^3-2*x+1==0,0.2,0.8),6)
```

Zadatak. Riješite jednadžbu $\cos x = \frac{1}{2}x$ s greškom manjom po apsolutnoj vrijednosti od jedne milijarditinke.

Rješenje: 1.029866529

Što dalje?

Metodom polovljenja ne možemo precizirati nultočku u kojoj funkcija dodiruje ali ne siječe x os. Tad bismo trebali koristiti neku drugu metodu, npr. **Newtonovu metodu tangente** ili **metodu fiksne točke**.

Naravno, postoje i numeričke metode za rješavanje sustava jednadžbi, koje su isto ugrađene u SageMath.

Stvari postaju teže ako tražimo rješenja jednadžbi u skupu prirodnih brojeva. Pogledajmo sljedeće jednadžbe s tri nepoznanice nad skupom pozitivnih prirodnih brojeva:

$$x + y = z$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$x^3 + y^3 = z^3$$

Za prvu jednadžbu lako nađemo rješenja: kad god izaberemo vrijednosti za x i y, za z uzmemo njihov zbroj i dobili smo jedno rješenje (npr. za $x = 1\ i\ y = 2$ uzmemo $z = 1 + 2 = 3$)

Za drugu jednadžbu je već teže naći rješenje. Ako se sjetimo Pitagorina teorema o pravokutnom trokutu, tad možemo ova rješenja geometrijski interpretirati: to su stranice pravokutnog trokuta sa cjelobrojnim duljinama. Zato se ta rješenja nazivaju *Pitagorine trojke*. Najjednostavnije rješenje je trojka brojeva $x = 3, y = 4, z = 5$, koja vam je možda poznata još iz osnovne škole. Šta je sa jednadžbom $x^3 + y^3 = z^3$? Opet ćemo se vratiti u prošlost. Nakon neuspješnog traženja rješenja, Pierre de Fermat je oko 1637. godine ustvrdio da za prirodan broj $n \geq 3$ jednadžba

$$x^n + y^n = z^n$$

nema rješenja, ali nije dao dokaz, već samo naveo da ima dokaz.[8] Ta tvrdnja je nazvana Zadnji Fermatov teorem, ne zbog toga što mu je bio zadnji u životu, već zadnji za koji se nije znalo je li istinit ili ne. Naime, stoljećima poslije matematičari su bezuspješno pokušavali dokazati ili oboriti taj teorem. Tek je engleski matematičar Andrew Wiles, nakon 358 godina, dokazao taj teorem 1995. godine. Ali tih 358 godina neuspješnog dokazivanja zadnjeg Fermatovog teorema nije bilo neuspješno, jer je kroz te pokušaje razvijena matematika koja je sada u osnovi moderne kriptografije, i bez koje je gotovo nezamisliv suvremeni svijet (bio dobar ili loš).

[8] De Fermat je bio veliki francuski matematičar koji je običavao sa sobom nositi primjerak knjige *Arithmetica* starog grka Diofanta i na marginama knjige zapisivati svoja matematička otkrića. Tako je na marginama zapisao ovu tvrdnju kao i da ima krasan dokaz ali da ne može stati na margine.